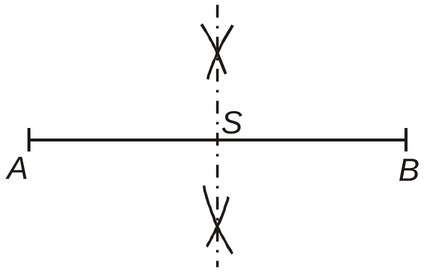
4.3.5 Dělení úseček

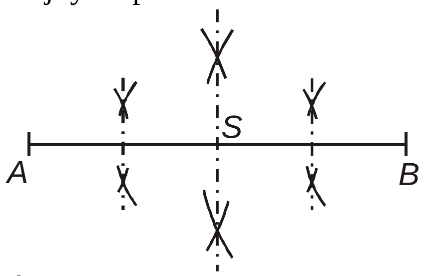
Předpoklady: 040304

Př. 1: Jak se možné pomocí kružítka a pravítka rozdělit libovolnou úsečku bez měření na dva stejné díly. Na jaké další počty stejných dílů je možné tímto postupem úsečky dělit?

Libovolnou úsečku můžeme rozdělit na dva díly tím, že na ní vyznačíme její střed.



Stejným způsobem můžeme dělit vzniklé poloviny.

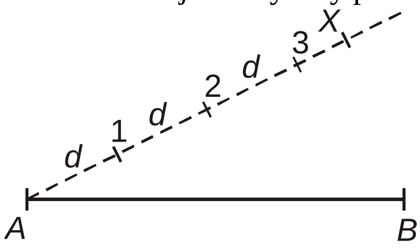


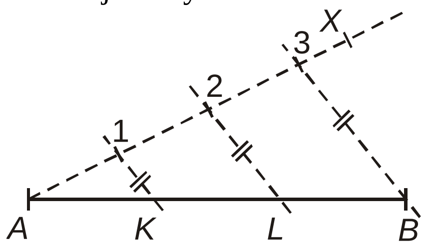
Úsečku můžeme dělit na 2, 4, 8, 16, … dílů (počty odpovídající mocninám dvou).

Př. 2: Najdi postup, kterým je možné bez měření rozdělit úsečku na libovolný počet stejných dílů.

Pedagogická poznámka: Zatímco první příklad vyřeší téměř všichni, u druhého se zatím úspěšný řešitel neobjevil. Proto nečekáme dlouho a přejdeme na následující příklad.

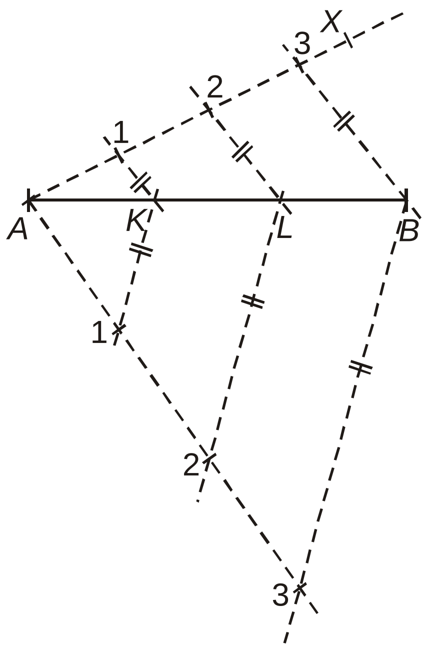
Př. 3: Na obrázcích je zachycený postup dělení úsečky na tři stejné díly.





Na čem je postup založený? Je výsledek dělení závislý na volbě pomocného bodu *X*? Ověř pochopení postupu tím, že příklad přerýsuješ do sešitu (libovolnou úsečku *AB* rozdělíš bez měření na tři stejné díly). Zopakuj postup do stejného obrázku ještě jednou s jiným bodem *X*. Zapiš slovy postup. Dokaž, že body *K* a *L* opravdu dělí úsečku *AB* na třetiny.

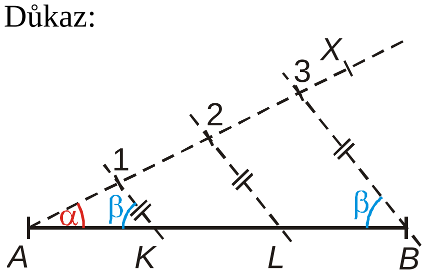
Postup je založený na podobnosti trojúhelníků: platí $AB3 \sim AL2 \sim AK1$.
Na volbě pomocného bodu *X* nezáleží (stejně jako na volbě vzdálenosti *d*).



Postup rozdělení úsečky na *n* stejných dílů:

1. Narýsujeme úsečku *AB*.
2. Narýsujeme polopřímku *AX*, na které neleží úsečka *AB*.
3. Na polopřímce *AX* vyznačíme *n* stejných dílů o libovolné vhodné délce *d*.
4. Konečný bod posledního dílu spojíme s bodem *B* úsečky *AB*.
5. Každý dalším bodem vyznačeným na polopřímce *AX* vedeme rovnoběžku s přímkou narýsovanou v předchozím bodu.
6. Rovnoběžky dělí úsečku *AB* na požadovaný počet dílů.

Důkaz:



Trojúhelník $AK1$ je podobný trojúhelníku $AB3$ podle věty *uu*:

- shodný společný úhel α,
- shodné úhly $AK1$ a $AB3$ (β) (shodné úhly rovnoběžek proťatých příčkou).

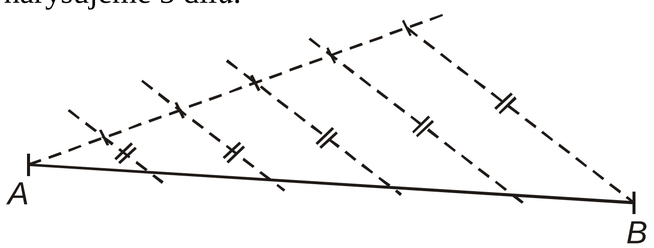
Trojúhelník $AK1$ je podobný trojúhelníku $AB3$ s koeficientem podobnosti $\frac{1}{3}$ (platí $|A1| = \frac{1}{3}|A3|$) $\Rightarrow$ musí platit $|AK| = \frac{1}{3}|AB|$.

Podobně můžeme dokázat s podobnosti trojúhelníků *AL2* a *AB3*, že $|AL| = \frac{1}{3}|AB|$.

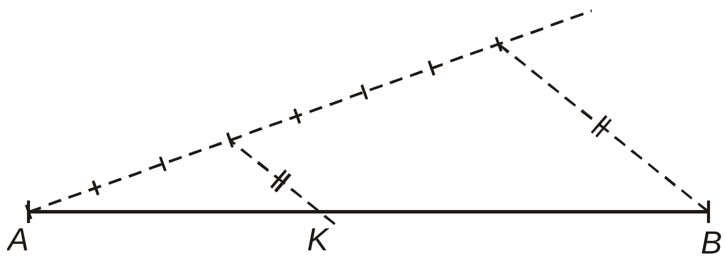
Pedagogická poznámka: V původním obrázku při první hodině byl na obrázku bod *X* náhodou zakreslen tak, že se zdálo, že je úsečka *AX* rozdělena na čtyři stejné díly, což část žáků vedlo k tomu, že ji dělili pomocí kružítka na čtvrtiny, což ukazuje na zásadní nepochopení postupu na obrázku. Někteří si také nevšimli, že přímka z bodu 3 prochází bodem *B* a směr rovnoběžek volili náhodně (projevilo se to ve chvíli, kdy měli děli úsečku pomocí druhé pomocné polopřímky). Většina třídy však obrázky pochopila správně a byla schopna příklady řešit bez větších problémů.

Př. 4: Narýsuj libovolnou úsečku *AB* a rozděl ji na pět stejných dílů.

Použijeme stejný postup jako v předchozím příkladu, pouze na pomocné polopřímce narýsujeme 5 dílů.



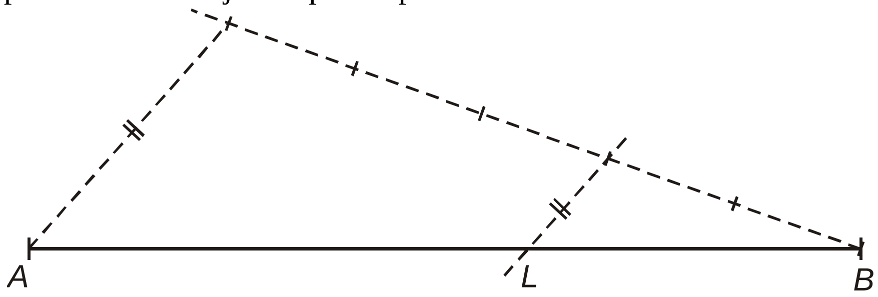
Př. 5: Narýsuj úsečku *AB*, $|AB| = 9\text{ cm}$. Na úsečce vyznač bod *K*, tak aby platilo $|AK| = \frac{3}{7}|AB|$.



Pedagogická poznámka: S příkladem nejsou problémy, mimo to, že někteří žáci zbytečně rýsují sedm rovnoběžek a dělí úsečky na sedm dílů.

Př. 6: Narýsuj úsečku *AB*, $\left|AB\right| = 11\,\text{cm}$. Na úsečce vyznač bod *L*, tak aby platilo $\left|BL\right| = \frac{2}{5}\left|AB\right|$.

Podobný příklad jako předchozí. Pomocnou přímku nebudeme kreslit z bodu *A*, ale z bodu *B*, protože v zadání je dán poměr pro úsek *BL*.

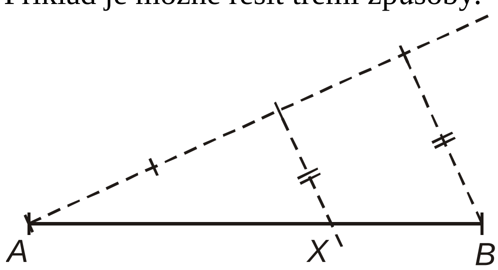


Pedagogická poznámka: Většina žáků rýsuje od bodu *A* podle poměru $\left|AL\right| = \frac{3}{5}\left|AB\right|$, což je samozřejmě také správně, ale je třeba ukázat i řešení v učebnici, aby bylo jasné, že pomocnou polopřímku můžeme kreslit z libovolné strany.

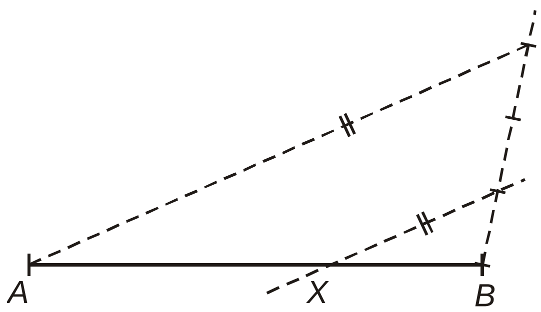
Př. 7: Úsečku *AB* rozděl bodem *X* na dvě části tak, aby platilo: $\left|AX\right| : \left|BX\right| = 2:1$. Najdi co nejvíce různých způsobů, jak na řešení využít podobnost trojúhelníků.

Bod *X* dělí úsečku na dvě části o dvou (úsečka *AX*) a jednom (úsečka *BX*) dílu $\Rightarrow$ celá úsečka má tři díly.

Příklad je možné řešit třemi způsoby.

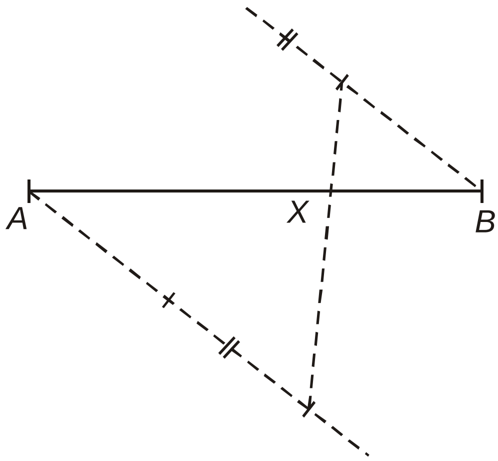


$\left|AX\right| : \left|BX\right| = 2:1 \Rightarrow \left|AX\right| : \left|AB\right| = 2:3$



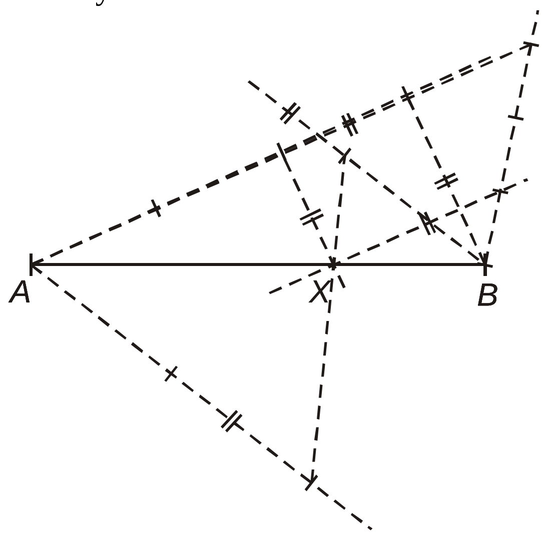
$\left|AX\right| : \left|BX\right| = 2:1 \Rightarrow \left|XB\right| : \left|AB\right| = 1:3$

Příklad můžeme vyřešit i přímo pouze poměrem $\left|AX\right| : \left|BX\right| = 2:1$, tím, že nakreslíme dva trojúhelníky navzájem podobné s tímto poměrem.



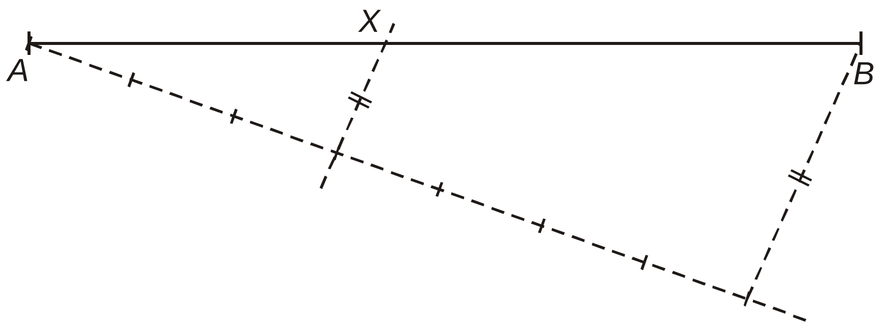
$|AX|:|BX| = 2:1 \Rightarrow |XB|:|AB| = 1:3$

Dodatek: V počítači můžeme všechny tři obrázky snadno položit na sebe a přesvědčit se, že všechny tři konstrukce vedou k nalezení stejného bodu.

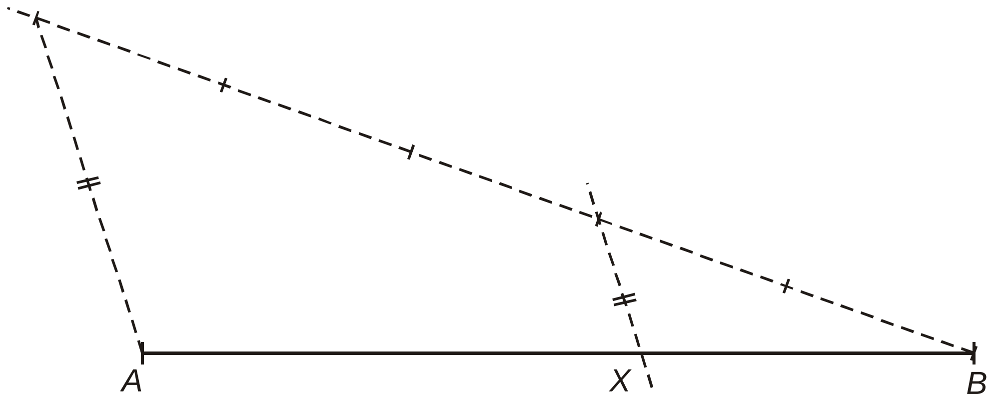


Př. 8: Úsečku *AB* rozděl bodem *X* na dvě části tak, aby platilo:
a) $|AX|:|BX| = 3:4$ b) $|AB|:|BX| = 5:2$

a) $|AX|:|BX| = 3:4$
Úsečku *AB* dělíme na sedm dílů.

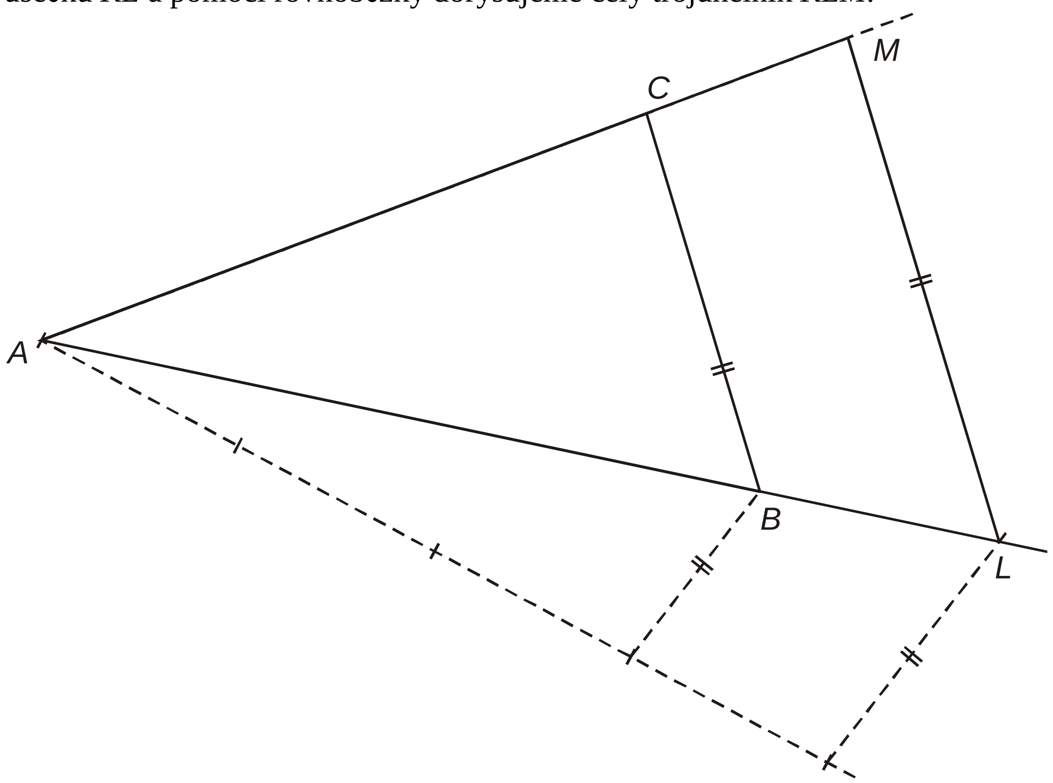


b) $|AB|:|BX| = 5:2$
Úsečku *AB* dělíme na pět dílů (z bodu *B*).



Př. 9: Narýsuj libovolný trojúhelník *ABC*. Narýsuj co nejúsporněji trojúhelník *KLM*, který je s trojúhelníkem *ABC* podobný s koeficientem podobnosti $k = \frac{4}{3}$.

Trojúhelník *KLM* narýsujeme tak, aby body *K* a *A* ležely na sobě $\Rightarrow$ zvětšíme úsečku *AB* na úsečku *KL* a pomocí rovnoběžky dorýsujeme celý trojúhelník *KLM*.



Shrnutí: Pomocí podobnosti můžeme snadno rozdělit libovolnou úsečku na libovolný počet shodných dílů.